

FALKE

Funktionales Denken und Analysis
Lernen von Konzepten in der Einführungsphase

**Test zum Ende der Sekundarstufe I
bzw. Einführungsphase**

**HAND-
REICHUNG**

Handreichung zur Durchführung, Auswertung und Interpretation



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz. Für einzelne Items gelten ggfs. andere Nutzungsrechte (s. Nachweise).
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Version 1.2
21.04.2021
Autor: Marcel Klinger
www.falke-test.de

1 In aller Kürze

Die FALKE-Tests (*Funktionales Denken und Analysis – Lernen von Konzepten in der Einführungsphase*) sind zwei aufeinander abgestimmte Leistungstests im Bereich Funktionen und Analysis und gingen aus meinem Promotionsprojekt (KLINGER 2018) hervor. Beide Tests wurden im Schuljahr 2014/15 in Nordrhein-Westfalen mit über 3000 Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Während der erste Test für einen Einsatz zu Beginn der Einführungsphase (d.h. dem ersten Oberstufenjahr) konzipiert ist, fokussiert der zweite Test das zur Verfügung stehende Wissen am Ende dieses Jahres. Die aus der Erhebung resultierende Stichprobe soll Ihnen zum Vergleich mit den Leistungen Ihrer eigenen Schülerinnen und Schüler dienen.

Damit dies funktioniert, ist es notwendig, dass Sie die entsprechenden Tests in Ihren Lerngruppen unter ähnlichen Voraussetzungen durchführen. Hierbei sollten Sie Folgendes beachten:

- Der Test besteht aus einem Deckblatt und einem Bearbeitungsblatt für jede Aufgabe (*Item*).
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **45 Minuten**.
- Es gibt **zwei Testheftvarianten**, welche sich nur durch die Reihenfolge der Aufgaben unterscheiden (A- und B-Bogen). Dies vermeidet der Erfahrung nach jedoch bereits Abschaueffekte.
- Der Test sollte **hilfsmittelfrei** geschrieben werden, also insbesondere **ohne digitale Werkzeuge** (etwa grafikfähige Taschenrechner, etc.).
- Beantworten Sie keine Fragen zum Lösungsweg. Unbekannte Begriffe (z.B. „Nullstelle“) können Sie hingegen kurz erläutern.

2 Über die Tests

Die FALKE-Tests wurden an der Universität Duisburg-Essen in Kooperation mit dem Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) entwickelt und im Schuljahr 2014/15 in Nordrhein-Westfalen großflächig mit über 3000 Schülerinnen und Schülern eingesetzt. Sie sollen die zu Beginn bzw. gegen Ende der Einführungsphase (während der damaligen Durchführung Jahrgangsstufe 10 am Gymnasium, Jahrgangsstufe 11 an Gesamtschulen und dem Beruflichen Gymnasium) zur Verfügung stehenden Kompetenzen im Bereich Funktionen und Analysis wissenschaftlich fundiert messen.

Beide Tests fordern die Anwendung grundlegender Denkweisen des propädeutischen Analysisunterrichts, etwa Konzepte im Bereich des sog. Funktionalen Denkens (VOLLRATH 1989). Hierzu stehen in jeder Aufgabe unterschiedliche Grundvorstellungen funktionaler Zusammenhänge (Zuordnung, Kovariation, Objekt) sowie verschiedener Darstellungsformen von Funktionen (situativ-sprachlich, graphisch-visuell, formal-symbolisch) im Vordergrund (s. z.B. BÜCHTER 2008). Als weiteren wichtigen Punkt deckt insbesondere der zweite Test verschiedene Grundvorstellungen im Bereich der Differentialrechnung (lokale Änderungsrate, Tangentensteigung, lokale Linearisierung) ab (z.B. BLUM & TÖRNER 1983; GREEFRATH ET AL. 2016).

Ausführliche Details zur fachdidaktischen Konzeption der Tests können Sie der Website <http://www.falke-test.de/hintergrund/> oder der entsprechenden Dissertationsschrift (KLINGER 2018) entnehmen.

3 Hinweise zur praktischen Durchführung


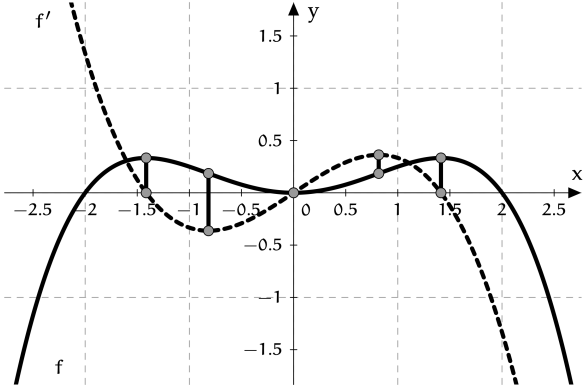
- Die jeweiligen Testhefte bestehen aus einem Deckblatt sowie einem Bearbeitungsblatt für jedes Item. Mitunter finden sich auch zwei Items auf einer Seite. Raum für die Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler findet sich jeweils unter der Aufgabenstellung.
- Die Tests sind so konstruiert, dass den Schülerinnen und Schülern 45 Minuten zur Bearbeitung zur Verfügung stehen sollen. In dieser Zeitspanne ist Zeit für das Lesen und Ausfüllen der Testheftdeckblätter durch die Schülerinnen und Schüler bereits enthalten.
- Um ein Abschreiben voneinander zu verhindern, wurde eine A- sowie eine B-Variante des Testheftes erstellt, welche in Länge und Anforderungen gleichwertig sind. Bitte teilen Sie die Testhefte abwechselnd aus, um Abschreibversuche zu erschweren.
- Um die Testergebnisse nicht einer möglichen Abhängigkeit von Bedienungsfertigkeiten von Taschenrechnern oder anderen digitalen Hilfsmitteln der Schülerinnen und Schüler zu unterwerfen, waren in der genannten nordrhein-westfälischen Erhebung keine elektronischen Hilfsmittel zugelassen, d.h. insbesondere auch kein grafikfähiger Taschenrechner.
- Machen Sie den Schülerinnen und Schülern transparent, wann die 45 Minuten für die Bearbeitung ablaufen. Schreiben Sie die Zeit, zu der die Schülerinnen und Schüler ihre Testhefte abgeben müssen, an die Tafel.
- Gehen Sie bitte nicht auf Schülerfragen zu Lösungswegen ein, geben Sie auch keine Tipps. Probleme, die durch unbekanntes Vokabular hervorgerufen werden, dürfen und sollten Sie entgegentreten. Ist den Schülerinnen und Schülern etwa der Begriff "Nullstelle" nicht oder nicht mehr bekannt, so kann dieser kurz erläutert werden. Dies geschieht am besten jedoch bereits vor Beginn der Bearbeitungszeit.

4 Auswertung der Tests

Die Tests können Sie, nachdem Ihre Schülerinnen und Schüler diese bearbeitet haben, selbst auswerten oder dies z.B. im Rahmen einer gemeinsamen Besprechung auf Vertrauensbasis durchführen. Für eine optimale Vergleichbarkeit mit der nordrhein-westfälischen Stichprobe bietet sich insbesondere die erste Variante an.

Die korrekten Lösungen der einzelnen Items finden Sie in den beiden folgenden Tabellen (für den ersten bzw. den zweiten Test). Hierbei ist die Reihenfolge der Items an ihrer Reihenfolge innerhalb der A-Varianten der Testbögen ausgerichtet. Die technische Itembezeichnung finden Sie jeweils oben rechts an jeder Aufgabe hinter dem Wort „Vermerk:“. Besteht ein Item aus mehreren Teilaufgaben, wird diese Kodierung um das jeweilige Suffix „1“, „2“, usw. erweitert.

Test zum Ende der Sekundarstufe I (erster Test)			
Nr.	Code	Bezeichnung	Korrekte Lösung
1	I6JG	Skifahrer	(a)
2	G6UH	Dateidownload	$f(t) = 3t$
3	A5CV	Koordinatensystem	Beschriftung der Achsen derart, dass $f(x) = 2x$ dargestellt wird.
4	C4XF1	Verschobene Funktion I	2 und 5
4	C4XF2	Verschobene Funktion I	$f(x) = x^2 - x$
5	R4TG	Parabelquiz	Die beiden letzten Aussagen sind korrekt.
6	N1FQ	Schwimmbecken	(2)
7	P5CX1	Kugelstoßen	2 [m]
7	P5CX2	Kugelstoßen	7 [m]
8	H7ZD	Weihnachtsmann	54 [ml]
9	L4MB	Parabelgleichung	$x^2 - 30x + 225 = 0$
10	Q3WD1	Rennstrecke	1,5 km
10	Q3WD2	Rennstrecke	bei etwa 1,3 km
10	Q3WD3	Rennstrecke	Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
11	B3XY	Scheitelpunkt	$(-1,0)$
12	J9SD	Kegelfüllung	Ein stetiger, konkaver, streng monotoner Funktionsgraph, der durch die Punkte (0,0) und (8,10) verläuft, ggfs. ab dort konstant fortgesetzt.
13	K9GF	Grundstücksfläche	20 [m]
14	F7GH	Müngstener Brücke	$f(x) = -\frac{1}{100}x^2$

Test zum Ende der Einführungsphase (zweiter Test)			
Nr.	Code	Bezeichnung	Korrekte Lösung
1	H4AB1	Ableitungskalkül	$f'(x) = 9x^2 + 6x - 3$
1	H4AB2	Ableitungskalkül	$g'(x) = 0$
1	H4AB3	Ableitungskalkül	$h'(x) = nx^{n-1}$
2	B3XZ	Scheitelpunkt	$(-1,0)$
3	W7CK	Funktionenlupe	(b)
4	U3PT	Graphische Ableitung II	(c)
5	G6UI	Dateidownload	$f(t) = 4t$
6	M8PL1	Verschobene Funktion II	$g(x) = (x + 1)^3 + 2(x + 1)^2 + 2$ (ggfs. ausmultipliziert)
6	M8PL2	Verschobene Funktion II	$h(x) = x^3 + 2x^2 + 3$
7	Y2VK1	Flugzeug	(b)
7	Y2VK2	Flugzeug	(c)
7	Y2VK3	Flugzeug	(c)
8	O5ZG	Skalierte Funktion	(d)
9	J9SE	Kegelfüllung	Ein stetiger, konkaver, streng monotoner Funktionsgraph, der durch die Punkte $(0,0)$ und $(6,9)$ verläuft, ggfs. ab dort konstant fortgesetzt.
10	D6LG1	Parabelöffnung	f' ist nach unten geöffnet.
10	D6LG2	Zwei Nullstellen	$c = -1$ oder $c = 3$
11	Z8PC1	Vorzeichen der Ableitung	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
11	Z8PC2	Vorzeichen der Ableitung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
11	Z8PC3	Vorzeichen der Ableitung	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
11	Z8PC4	Vorzeichen der Ableitung	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
11	Z8PC5	Vorzeichen der Ableitung	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
12	A5CW	Koordinatensystem	Beschriftung der Achsen derart, dass $f(x) = 3x$ dargestellt wird.
13	V3RK	Graphische Ableitung III	
14	X4TP	Verschobene Ableitung	(d)
15	S3AB	Graphische Ableitung I	
16	N1FR	Schwimmbecken	(2)

5 Analyse der Ergebnisse und Vergleich

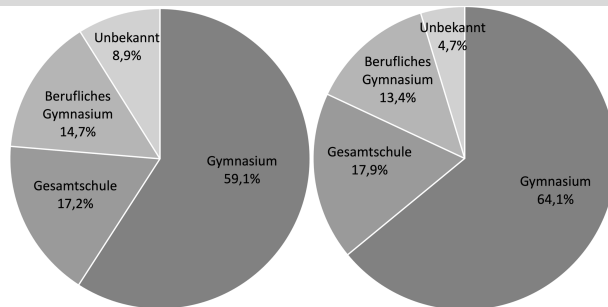
Im Folgenden sind zu jeder Testaufgabe der beiden Tests entsprechende empirische Daten der Erhebung in Nordrhein-Westfalen mit 3202 bzw. 2665 Schülerinnen und Schülern dargestellt (Details s. Infobox). Weiterhin wurden diese auch um einen kurzen didaktischen Kommentar bzw. eine entsprechende Einordnung häufiger Falschantworten ergänzt. Die dargestellten Informationen sollen dazu dienen, die eigene Lerngruppe vor diesem Hintergrund vergleichend einordnen und gleichzeitig auf häufige Fehler reagieren zu können.

Die Items sind der Übersichtlichkeit halber nach ihrer Reihenfolge in den A-Varianten beider Testhefte sortiert. Fünf Items wurden sowohl im ersten als auch im zweiten Test (in leicht abgewandelter Form) verwendet, um die Vergleichbarkeit beider Tests untereinander zu gewährleisten. Für diese finden sich die entsprechenden Informationen jeweils nur in der folgenden Beschreibung des ersten Tests.

INFOBOX

Zusammensetzung der Stichprobe

Von den 3202 Teilnehmerinnen und Teilnehmern des ersten Tests sind 1602 (50,0 Prozent) weiblichen und 1584 (49,5 Prozent) männlichen Geschlechts. Die übrigen Probanden verweigerten die Angabe. Am zweiten Test nahmen 1304 (48,9 Prozent) Mädchen und 1340 (50,3 Prozent) Jungen teil. Auch hier handelt es sich in den übrigen Fällen um Enthaltungen. Die Verteilung der unterschiedlichen Schulformen mit gymnasialer Oberstufe ist nebenstehender Grafik zu entnehmen.



erster Test

zweiter Test

5.1 Test zum Ende der Sekundarstufe I (erster Test)

5.1.1 Skifahrer (I6JG)

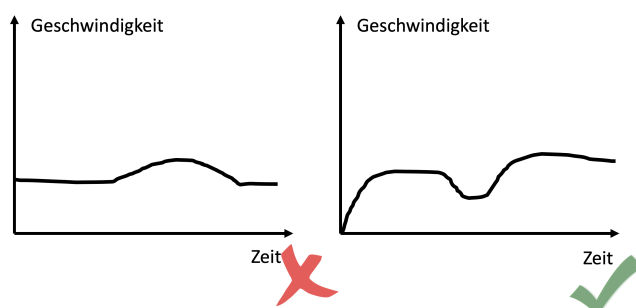
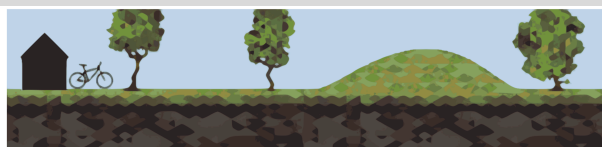
Ausgehend von einer vorhandenen situativen Beschreibung sowie der entsprechenden Skizze müssen Schülerinnen und Schüler das passende Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm wählen. Es wird also ein Wechsel zwischen der Darstellungsform der situativ-verbalen Beschreibung und des Funktionsgraphen erwartet. Für diesen kann auch hier keine dominierende Richtung angegeben werden: D.h. es ist nicht klar, ob Schülerinnen und Schüler einen Graphen aus der gegebenen Situation ableiten oder die gegebenen Graphen anhand der Skizze validieren. Die Aufgabe zielt hierbei auf den Graph-als-Bild-Fehler ab (s. Infobox), welcher durch Antwortmöglichkeit (b) repräsentiert wird.

68,5 Prozent der Schülerinnen und Schüler bearbeiteten dieses Item korrekt, während 17,4 Prozent Antwortmöglichkeit (b) wählten und somit besagten Fehler begingen. Die beiden verbleibenden Distraktoren unterscheiden sich jedoch nicht ganz so deutlich: Während 8,6 Prozent der Schülerinnen und Schüler Antwort (c) bevorzugten, markierten 5,6 Prozent Graph (d).

INFOBOX

Graph-als-Bild-Fehler

Der Graph-als-Bild-Fehler bezeichnet einen häufig auf eine gewisse Fehlvorstellung deutenden Fehler, welcher sich bei einem Darstellungswechsel zwischen der situativ-sprachlichen und graphisch-visuellen Darstellungsform im Kontext funktionaler Zusammenhänge manifestiert (KLINGER 2018, RUCHNIEWICZ 2018). SCHLÖGLHOFFER beschreibt den Graph-als-Bild-Fehler als eine häufige Fehlinterpretation von Funktionsgraphen, welche darin besteht, „dass sie als fotografische Abbilder von Realsituationen angesehen werden“ (SCHLÖGLHOFFER 2000, S. 16).



5.1.2 Dateidownload (G6UH/I)

Die Aufgabe erwartet einen Darstellungswechsel zwischen einer Situationsbeschreibung und einem geeigneten Funktionsterm. Hierbei können Schülerinnen und Schüler diesen nicht rechnerisch bestimmen und schließlich mit den gegebenen Antwortmöglichkeiten abgleichen, sondern müssen gezielt die vorgeschlagenen Modelle miteinander vergleichen, mit dem Sachzusammenhang in Beziehung setzen und eine Entscheidung zugunsten des plausibelsten Modells treffen.

Item	A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)	F (%)
G6UH	9,3	60,5	7,0	3,2	17,1	2,4
G6UI*	12,8	57,2	11,1	3,4	13,4	1,4

*Die Nummerierung der Antwortmöglichkeiten wurde in der Tabelle so verändert, dass diese inhaltlich den entsprechenden Antwortmöglichkeiten von Item G6UH entspricht

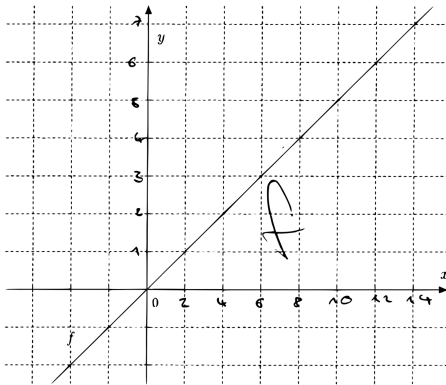
5.1.3 Koordinatensystem (A5CV/W)

Schülerinnen und Schüler müssen bei der Bearbeitung des Items etwaig restringierte Vorstellungen von Koordinatensystemen überwinden: Dargestellt ist auf den ersten Blick die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten, jedoch fehlt eine genaue Beschriftung der Achsen. Die Lernenden müssen nun die Achsen so beschriften, dass sich nicht die Gerade zur Gleichung $y = x$ sondern zur Gleichung $y = 2x$ (bzw. $y = 3x$ für Item A5CW) ergibt. Durch die Einfachheit der entsprechenden Ausdrücke sowie die mit y bzw. x beschrifteten Koordinatenachsen soll sichergestellt werden, dass ein Scheitern bei der Bearbeitung der Aufgabe möglichst aus einem Unverständnis uneinheitlich skalierten Koordinatensysteme rührt.

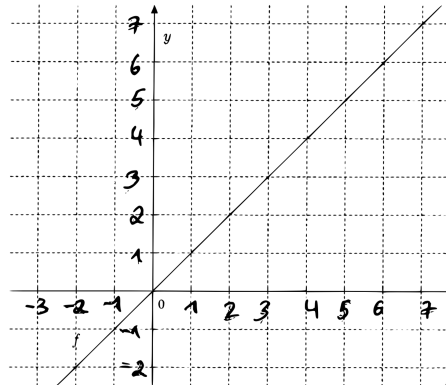
Lösungsklasse	A5CV (%)	A5CW (%)
Korrekte Beschriftung	51,6	58,0
Achsen vertauscht	10,3	9,5
Standardskalierung	26,6	23,1
Neue Gerade gezeichnet	2,6	1,2
Nicht klassifiziert	9,0	8,1

In etwa einem Zehntel aller Bearbeitungen wurden die Achsen durch die Schülerinnen und Schüler vertauscht („Achsen vertauscht“ in der Grafik unten). Es wurde jedoch eine ansonsten korrekte

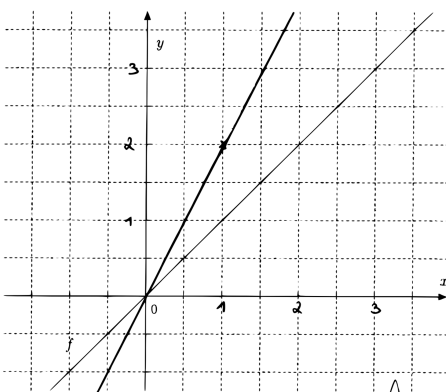
Skalierung gewählt, so dass implizit die Geraden zu der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ bzw. $y = \frac{1}{3}x$ dargestellt wurden. Ein Großteil der Falschbearbeitungen zeigt jedoch eine übliche und über beide Achsen einheitliche Skalierung („Standardskalierung“). Gelegentlich finden sich auch Versuche, eine neue Gerade einzuzichnen, die – bei impliziter Annahme einer Standardskalierung – die Gerade zur Gleichung $y = 2x$ bzw. $y = 3x$ darstellt („Neue Gerade gezeichnet“). In diesen Fällen beschriften Schülerinnen und Schüler die Achsen dann entweder nicht oder entsprechend der Standardskalierung.



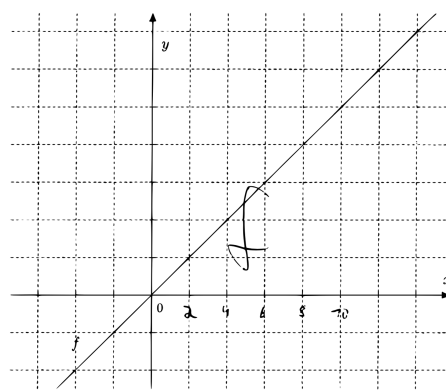
Achsen vertauscht



Standardskalierung



Neue Gerade gezeichnet



Nicht klassifiziert

5.1.4 Verschobene Funktion I (C4XF)

Es handelt sich um relativ einfache Items, die von 70,2 bzw. 60,4 Prozent (C4XF1 bzw. C4XF2 und somit für die erste bzw. zweite Teilaufgabe) der bearbeitenden Schülerinnen und Schülern gelöst werden konnten.

Der überwiegende Teil der Schülerinnen und Schüler scheint daher in der Lage zu sein, die Wirkungen von einfachen Verschiebungen auf Punkte des Graphen (in diesem Fall die Nullstellen) zu übertragen und kennt die Wechselwirkungen zwischen Graph und Funktionsterm bei Verschiebung entlang der y-Achse.

5.1.5 Parabelquiz (R4TG)

In der Aufgabenstellung wird zunächst eine Funktionenschar über einen Parameter $a \in \mathbb{R}$ mit der Vorschrift $f(x) = a \cdot x^2$ definiert. Um Aussagen über diese zu bewerten, muss insbesondere der Parameter a „wie ein normaler Wert“ behandelt, d.h. darf keinesfalls als weiteres Argument der Funktion verstanden werden. In diesem Sinne ist es sinnvoll, wenn die Bearbeitenden die Variable a vor allem als allgemeine Zahl, d.h. als „beliebige, aber feste Zahl aus [einem] betreffenden Bereich“ auffassen (MALLE 1993, S. 80).

Für die Aufgabe gibt sich eine Gesamtlösungsquote (d.h. der prozentuale Anteil derjenigen Lernenden, die alle Kreuze korrekt gesetzt haben) von **31,1** Prozent. Die Verteilung auf die einzelnen Aussagen ist im Folgenden dargestellt:

Aussage	wahr (%)	falsch (%)
1	25,9	74,1
2	32,7	67,3
3	16,8	83,2
4	75,6	24,4
5	59,4	30,6

5.1.6 Schwimmbecken (N1FQ/R)

Im ersten Test entfielen **79,1** Prozent auf korrekte Bearbeitungen. **9,3** bzw. **11,6** Prozent der Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe bearbeiteten, wählten Antwortmöglichkeit (1) bzw. (3). Für den zweiten Test ergeben sich noch bessere Werte: Hier wurde die Aufgabe in **86,3** Prozent der Fälle korrekt gelöst. **5,0** bzw. **8,7** Prozent entfallen auf Möglichkeit (1) bzw. (3). Hierbei ist Antwortmöglichkeit (1) jene, die auf eine sog. „Illusion of Linearity“ (dt. auch „Übergeneralisierung linearer Zusammenhänge“, s. Infobox) deuten kann.

5.1.7 Kugelstoßen (P5CX)

Beide Teilaufgaben verlangen von Schülerinnen und Schülern eine gegebene Funktionsvorschrift entsprechend eines Sachkontextes zu deuten. Es wird also ein Darstellungswechsel zwischen Funktionsgleichung und situativ-verbaler Beschreibung gefordert. Probanden müssen dabei ausgehend von den gesuchten kontextlichen Informationen „Höhe des Abstoßpunktes“ und „Maximalhöhe der Flugbahn“ die entsprechenden Analoga innerhalb des Funktionsmodells ausmachen, d.h. erkennen, dass y -Achsenabschnitt und Scheitelpunkt einer parabelförmigen Flugkurve bzw. Funktion zu bestimmen sind.

Nachstehende Tabelle beinhaltet die häufigsten Lösungen der ersten Teilaufgabe P5CX1.

Lösungsklasse	Häufigkeit (%)
2 m	22,0
7 m	33,0
0 m	8,2
Typische Wurfhöhen (zwischen 1,5 m und 2 m)	3,9
Sonstige Antworten	32,6

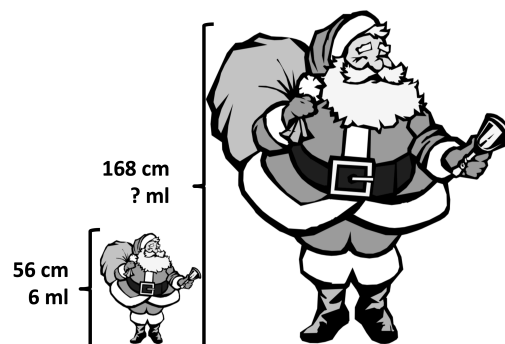
Die zweite Teilaufgabe wurde mit 53,6 Prozent deutlich häufiger gelöst.

Die zweite Aufgabe zeigt sich somit als deutlich leichter zu lösen. Dies lässt sich möglicherweise darauf zurückführen, dass zur Lösung der ersten Aufgabe eine Rechnung notwendig ist, während der Scheitelpunkt an der entsprechenden Gleichung unmittelbar abgelesen werden kann. Hinzu kommt, dass bei P5CX1 häufig versucht wird, den y -Achsenabschnitt direkt aus der Funktionsvorschrift abzulesen. Der Fehler, der auf diesen Versuch deutet, resultiert dann auf die Angabe „7 m“.

INFOBOX

Illusion of Linearity

Der Begriff bezeichnet den Sachverhalt, dass Schülerinnen und Schüler die Tendenz zeigen, die Beschreibbarkeit diverser Phänomene durch lineare funktionale Zusammenhänge weiträumig anzunehmen; dies wohlgermerkt auch dort, wo dies nicht angebracht ist (KLINGER 2018; DE BOCK ET AL. 2007). In der nebenstehenden Aufgabe spiegelt sich dies darin wider, dass bei der maßstäblichen Vergrößerung der Grafik häufig angenommen wird, dass sich der Flächeninhalt gleichartig verändert (vgl. KLINGER & BARZEL 2019). Kognitive Konflikte kann man beispielsweise erzeugen, wenn man Lernenden eine ähnliche Aufgabe mit reguläreren Figuren (etwa Rechtecken) vorlegt.



5.1.8 Weihnachtsmann (H7ZD)

Die Lösungsquote der Aufgabe beträgt 3,4 Prozent. Die überwiegende Mehrheit der Falschantworten lautete „18 ml“. Konkret nannten 77,7 Prozent von insgesamt 3128 Probanden, die die Aufgabe bearbeiteten, den entsprechenden Wert. 19,0 Prozent gaben einen sonstigen falschen Wert als Lösung an. An dieser Aufgabe zeigt sich das Fehlermuster „Illusion of Linearity“ (s. Infobox) besonders deutlich.

5.1.9 Parabelgleichung (L4MB)

Das Item verlangt ein Denken in entgegengesetzter Richtung: Statt wie sonst üblich muss hier eine gegebene quadratische Gleichung nicht gelöst, sondern so aufgestellt werden, dass sich eine vorgegebene Lösung ergibt. Die Aufgabe kann somit im Sinne Winters als produktive Übungsaufgabe, in der die geforderte Gleichung das Produkt darstellt, bezeichnet werden (vgl. WINTER 1984, S. 12 ff.). Dies macht es letztlich notwendig, dass p und q als Unbekannte betrachtet werden, die es zu bestimmen gilt, während x zwar die Rolle einer Unbekannten einnimmt, deren Wert jedoch a priori gegeben ist.

Die Aufgabe erweist sich als eine der anspruchsvollsten im gesamten ersten Test. Dies spiegelt sich in einer äußerst geringen Lösungsquote von 3,6 Prozent sowie anhand von 1278 Nichtbearbeitungen bei 3202 administrierten Testheften wider. Verschiedene Ansätze von unterschiedlicher Richtigkeit zur Lösung des Items sind in folgender Abbildung exemplarisch dargestellt.

$$\begin{array}{l}
 x^2 + px + q = 0 \\
 x^2 + px = -q \\
 x^2 = -px - q \\
 x = \frac{-p}{1} = -\frac{p}{1}
 \end{array}$$

Direkte Umformung

$$\begin{array}{l}
 x^2 + px + q = 0 \\
 x^2 + px + q = 15 \\
 z^2 + 3 \cdot z + 5 = 15
 \end{array}$$

Wert für x eingesetzt

$$\begin{array}{l}
 (x-15)^2 \\
 x^2 - 30x + 225
 \end{array}$$

Scheitelpunktform

$$\begin{array}{l}
 (x-15)(x-15) \\
 = x^2 - 30x + 225
 \end{array}$$

Linearfaktorzerlegung

$$15 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (\text{weil nur eine Lösung})$$

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0 \mid 12 \\
 \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0
 \end{array}$$

$$-\frac{p}{2} \pm 0 = 15$$

$$-\frac{p}{2} = 15 \mid \cdot (-2)$$

$$p = -30$$

$$\left(\frac{-30}{2}\right)^2 - q = 0$$

$$\frac{900}{4} - q = 0 \mid +q$$

$$q = \frac{900}{4} = \frac{450}{2} = 225$$

$$x^2 - 30x + 225$$

pq-Formel

5.1.10 Rennstrecke (Q3WD)

Die Beantwortung der Detailfragen dieser Aufgabe erfordert von den Lernenden, den entsprechenden Graphen vor dem gegebenen Sachkontext zu interpretieren und entsprechende Rückschlüsse auf die gegebene Situation zu ziehen. Es handelt sich also um einen Wechsel der Repräsentationsform zwischen Graph und situativ-verbaler Beschreibung. Hierbei kann jedoch keine Richtung in eindeutiger Weise festgelegt werden: Denkbar ist, dass Schülerinnen und Schüler die gesuchten Eigenschaften (also z.B. die Stelle der geringsten Geschwindigkeit) direkt am Graphen suchen oder aber die gegebenen Antwortmöglichkeiten auf ihre Plausibilität hin anhand des Graphen prüfen.

Entsprechend ihres Einsatzes in der PISA-Studie ist die Aufgabe für 15-jährige Schülerinnen und Schüler konzipiert (vgl. BAUMERT, STANAT & DEMMRICH 2001). In Deutschland deckt der neunte Jahrgang einen Großteil dieser Schülergruppe ab. Entsprechend sollten die drei Items für Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Einführungsphase vergleichsweise einfach zu lösen sein. Dies spiegelt sich in folgenden Zahlen wider.

Item	A (%)	B (%)	C (%)	D (%)
Q3WD1	9,5	80,7	7,3	2,5
Q3WD2	2,1	1,2	94,5	2,3
Q3WD3	2,2	95,4	1,6	0,7

5.1.11 Scheitelpunkt (B3XY/Z)

Die Bearbeitung von Aufgabe B3XY bzw. B3XZ kann rein prozedural erfolgen, indem ein entsprechender Kalkül aufgerufen wird, d.h. indem die entsprechende Gleichung beispielsweise in die Scheitelpunktform überführt wird.

Zur Überführung der Normalform in die Scheitelpunktform ließe sich in ähnlichen Aufgaben etwa das Verfahren der quadratischen Ergänzung anwenden, welches aufgrund der Gutartigkeit der gegebenen Werte in diesem Fall jedoch nicht benötigt wird. Tatsächlich kann der Funktionsterm unmittelbar, etwa mit der ersten binomischen Formel, in die entsprechende Form $f(x) = (x + 1)^2$ überführt und anhand dieser Darstellung der Scheitelpunkt sodann abgelesen werden.

Folgende Tabelle zeigt jedoch, dass dies für viele Lernende ein Problem darstellt.

Lösungsklasse	B3XY (%)	B3XZ (%)
<i>Scheitelpunkt (-1,0) bestimmt</i>	24,0	26,3
<i>Nur x-Koordinate -1 bestimmt</i>	7,4	7,4
<i>Punkt (-2,1) bestimmt</i>	5,1	4,4
<i>Punkt (2,1) bestimmt</i>	5,8	2,8
<i>Punkt (0,1) bestimmt</i>	5,8	4,9
<i>Punkt (1,0) bestimmt</i>	4,0	3,7
<i>Nur y-Koordinate 1 bestimmt</i>	2,7	2,0
<i>Nur x-Koordinate 1 bestimmt</i>	3,4	2,2
<i>Nicht klassifiziert</i>	47,7	46,1
<i>Verwendung des Ableitungskalküls</i>	—	14,0

5.1.12 Kegelfüllung (J9SD/E)

Schülerinnen und Schüler müssen hier erkennen, dass der geforderte Graph aufgrund des mit der Füllhöhe steigenden Gefäßumfangs nicht von linearer Gestalt sein kann. Auch diese Aufgabe bietet daher die Möglichkeit der Übergeneralisierung linearer Zusammenhänge im Sinne der Illusion of Linearity (s. Infobox), etwa indem eine Gerade (bzw. Strecke) durch den Ursprung und den Punkt (8, 10) bzw. (6,9) gezeichnet wird. Da mit zunehmendem Füllstand auch die Größe der Wasseroberfläche zunimmt, ist die Füllgeschwindigkeit rückläufig, so dass der entsprechende Graph konkav zu zeichnen ist. Bis auf das Durchlaufen der zwei charakteristischen Punkte (0, 0) sowie (8, 10) bzw. (6,9) wird nur ein qualitativ-korrekter Verlauf der Kurve erwartet.

Insgesamt wird die Aufgabe von 38,3 Prozent der Schülerinnen und Schüler korrekt gelöst. Mit 22,3 Prozent der Bearbeitungen bildet die Klasse „Linearer Graph, Achsen korrekt“ die größte Fehlerklasse. Bei Klasse „Linearer Graph, Achsen vertauscht“ wurden zusätzlich die Koordinatenachsen entgegen üblicher Konventionen so beschriftet, dass die Größe „Zeit“ an der y-Achse abgetragen wurde. Beide Klassen beschreiben zusammen eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern, bei denen zumindest der Verdacht besteht, dass die entsprechende Skizze das Resultat einer Übergeneralisierung linearer Verläufe darstellt. In diesem Fall würde es sich wieder um eine Illusion of Linearity handeln.

Insgesamt zeigt etwa ein Zehntel der Schülerinnen und Schüler Probleme bei der Deklaration der Koordinatenachsen (Klassen „Konvexer Graph, Achsen vertauscht“, „Konkaver Graph, Achsen vertauscht“ und „Linearer Graph, Achsen vertauscht“). Jener Teil, der unter Klasse „Konvexer Graph, Achsen vertauscht“ gefasst wird, bearbeitet das Item bis auf diesen Fehler sogar korrekt.

Bemerkenswert im Kontext dieser Aufgabe ist auch, dass diese stark sensitiv auf das Geschlecht des Testteilnehmenden reagiert. So schneiden Schülerinnen hier statistisch deutlich schlechter ab als Schüler, was sich in einer Differenz der entsprechenden Lösungsquoten in beiden Substichproben von 19,7 Prozentpunkten im ersten bzw. 16,6 Prozentpunkten im zweiten Test widerspiegelt. Details zu diesem Umstand können KLINGER (2020) entnommen werden.

Lösungsklasse	J9SD (%)	J9SE (%)
<i>Konkaver Graph, abbrechend</i>	36,2	45,5
<i>Konkaver Graph, konstant fortgesetzt</i>	2,1	3,1
<i>Konvexer Graph, Achsen vertauscht</i>	2,4	1,1
<i>Konvexer Graph, abbrechend</i>	2,5	3,5
<i>Konvexer Graph, konstant fortgesetzt</i>	0,1	0,2
<i>Konkaver Graph, Achsen vertauscht</i>	4,3	4,5
<i>Linearer Graph, Achsen korrekt</i>	22,3	19,2
<i>Linearer Graph, Achsen vertauscht</i>	3,8	1,8
<i>Stückweise linearer Graph</i>	3,5	2,9
<i>Charakteristische Punkte nicht auf Graph</i>	8,6	10,4
<i>Nicht klassifiziert</i>	14,3	7,9

5.1.13 Grundstücksfläche (K9GF)

Der betrachteten Aufgabe liegt eine situativ-verbale Beschreibung einschließlich einer unterstützenden Skizze zugrunde. Ausgehend von den beschriebenen Veränderungen des Grundstücks der Familie Karahan müssen Schülerinnen und Schüler auf die Seitenlängen der vormals quadratischen Fläche schließen. Zur Lösung der Aufgabe muss i.d.R. eine entsprechende Gleichung aufgestellt werden, da sich eine rein mentale Bearbeitung der Aufgabe im Sinne eines gedanklichen Umsortierens als zu schwierig erweisen dürfte. Entsprechend findet ein Darstellungswechsel von einer Situation in eine formal-symbolische Form statt.

Bezeichnet x die Länge des ursprünglichen quadratischen Grundstücks, kann entsprechend der Aufgabenstellung folgende Gleichung aufgestellt werden: $(x + 2,5)(x - 2) - x^2 = 5$.

Die quadratischen Terme löschen sich beim weiteren Umformen unmittelbar aus, so dass sich schließlich $x = 20$ als eindeutige Lösung ergibt.

Mit 20,6 Prozent ist „10 [m]“ die häufigste Falschantwort. Da ein großer Anteil der Schülerinnen und Schüler, die diese Antwort gaben, ohne das Anfertigen einer Skizze oder Verschriftlichen einer Rechnung auskam, ist davon auszugehen, dass es sich häufig um eine auf der gegebenen Zeichnung basierende rein visuelle Schätzung handelt. Es ist also tatsächlich davon auszugehen, dass keine entsprechenden Mathematisierungsansätze erfolgt sind.

Lösungsklasse	Häufigkeit (%)
2 [m]	4,0
4 [m]	2,2
5 [m]	2,4
10 [m]	20,6
20 [m]	8,2

5.1.14 Müngstener Brücke (F7GH)

Die Müngstener Brücke bei Solingen ist aufgrund ihrer parabelförmigen Stützkonstruktion häufig Fokus verschiedener Schul- und Lehrbuchaufgaben (z.B. GRIESEL ET AL. 2012, S. 20).

Die resultierende Aufgabe ist empirisch die schwierigste im gesamten ersten Test, wie die folgende Tabelle zeigt.

Lösungsklasse	Häufigkeit (%)
$f(x) = -\frac{1}{100}x^2$	1,5
$f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + \dots$	0,8
$f(x) = -ax^2 + \dots$ mit positivem a	26,1
Sonstiges Polynom	31,5
Sonstige Lösungen	40,1

5.2 Test zum Ende der Einführungsphase (zweiter Test)

5.2.1 Ableitungskalkül (H4AB)

Während im ersten Aufgabenteil noch bekannte Regeln zum Ableiten genutzt werden können, stellt die konstante und somit innerhalb ihrer Funktionsgleichung x -befreite Funktion g im zweiten Aufgabenteil ein erstes mögliches Hindernis dar. Versagen an dieser Stelle bekannte Prozedere, kann z.B. auf graphische Vorstellungen zurückgegriffen werden, um die entsprechende Ableitungsfunktion zu erhalten. Der Funktionsgraph zu g ist aufgrund seiner simplen Struktur schnell mental visualisiert, so dass Einsicht möglich ist, dass die Ableitungsfunktion konstant null beträgt. In diesem Zusammenhang kann dann die Vorstellung der Ableitungsfunktion als Steigung des Funktionsgraphen eine wichtige Rolle spielen. Der dritte Aufgabenteil wirft für Schülerinnen und Schüler ein weiteres etwaiges Hindernis auf: Hier muss die Zahl n als Parameter akzeptiert und entsprechend der üblichen Regeln verarbeitet werden. Während es sich bei x um das eigentliche Funktionsargument handelt, das somit unter dem Veränderlichenaspekt zu betrachten ist, muss n als feste Zahl im Sinne einer Variablen als allgemeine Zahl aufgefasst werden (MALLE 1993, S. 80).

Item	korrekt (%)	falsch (%)
H4AB1	87,6	12,4
H4AB2	80,6	19,4
H4AB3	63,0	37,0

Insbesondere letzteres bereitet vielen Lernenden Probleme, wie die folgenden häufigen Falschbearbeitungen exemplarisch zeigen.

$$h'(x) = (x \cdot n)^{n-1} \quad h'(x) = n \cdot x$$

Falsche Klammerung

Exponent fehlt

$$h'(x) = \cancel{(x \cdot n)^{n-1}} \cdot \cancel{(x \cdot n)^{n-1}} \cdot \cancel{(x \cdot n)^{n-1}} \cdot x \cdot (n-1)$$

Reduzierter Exponent wird zu Faktor

5.2.2 Funktionenlupe (W7CK)

Dieses Item basiert auf der Idee eines „Funktionenmikroskops“ bzw. einer „Funktionenlupe“, welche auf KIRSCH (1979) zurückgeht. Es basiert darauf, dass jede nicht-pathologische Kurve bei ausreichender Vergrößerung linear erscheint.

Insgesamt wurde bei 74,7 Prozent der gegebenen Antworten das korrekte Feld angekreuzt. Entsprechend wählten 24,8 Prozent Möglichkeit (a). Weitere 0,5 Prozent entfallen auf ungültige Antworten bzw. eindeutige Bearbeitungsversuche, bei denen jedoch kein Kästchen gewählt wurde.

5.2.3 Graphische Ableitung II (U3PT)

Schülerinnen und Schüler müssen hier ausgehend von vier gegebenen Funktionsgraphen den Graphen der Ableitungsfunktion einer gegebenen Funktion identifizieren. Insofern können die durch dieses Item abgefragten Fähigkeiten grob dem Bereich des graphischen Ableitens zugeordnet werden (KLINGER 2018, S. 127 f.).

Insgesamt wählten so 73,3 Prozent der Schülerinnen und Schüler die korrekte Antwort (c). Entsprechend zeigen sich die drei Distraktoren (a), (b) und (d) mit 6,0, 9,0 bzw. 11,5 Prozent relativ schwach.

5.2.4 Verschobene Funktion II (M8PL)

Die folgende Tabelle zeigt deutlich die allgemeine Lehrerfahrung, nach welcher das Nachverfolgen von Verschiebungen des Funktionsgraphen innerhalb der algebraischen Darstellungsform Lernenden in vertikaler Richtung deutlich leichter fällt als in horizontaler Richtung.

Item	Lösungsklasse	Häufigkeit (%)
M8PL1	$(x + 1)^3 + 2(x + 1)^2 + 2$	23,7
M8PL1	$(x - 1)^3 + 2(x - 1)^2 + 2$	3,4
M8PL1	$x^3 + 2x^2 + 3$	5,3
M8PL1	$x^3 + 2x^2 + 1$	11,5
M8PL1	$x^3 + x^2 + 2$	14,2
M8PL1	$x^3 + 3x^2 + 2$	5,4
M8PL1	Nicht klassifiziert	36,5
M8PL2	$x^3 + 2x^2 + 3$	76,7
M8PL2	$x^3 + 2x^2 + 1$	2,9
M8PL2	$(x + 1)^3 + 2(x + 1)^2 + 2$	1,1
M8PL2	$(x - 1)^3 + 2(x - 1)^2 + 2$	0,3
M8PL2	Nicht klassifiziert	21,0

5.2.5 Flugzeug (Y2VK)

Die Aufgabe besteht aus drei Teilaufgaben (Y2VK1, Y2VK2 und Y2VK3) und fokussiert die Begriffe „Durchschnittsgeschwindigkeit“ und „Momentangeschwindigkeit“ bzw. allgemeiner die Thematik der durchschnittlichen und momentanen Änderungsrate.

Item	A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)	F (%)
Y2VK1	4,4	69,4	13,0	6,7	3,9	2,1
Y2VK2	3,7	4,5	67,6	1,3	1,8	20,8
Y2VK3	2,9	6,5	35,5	8,9	24,2	21,7

5.2.6 Skalierte Funktion (O5ZG)

Das Item zielt auf die Auswirkungen des Hinzufügens eines Faktors vor der Funktionsvorschrift auf den Funktionsgraphen ab. Sowohl Lösung (a) als auch Lösung (d) repräsentieren skalierte Varianten des ursprünglichen Funktionsgraphen. Der unter (a) abgebildete Graph stellt die Funktion $f(2x)$, d.h. eine Stauchung des ursprünglichen Funktionsgraphen in x -Richtung, dar. Tatsächlich bewirkt die vorgegebene Skalierung aber eine Streckung des Funktionsgraphen in y -Richtung.

Das Item kann so z.B. durch Betrachtung auf Zuordnungsebene gelöst werden: Der Faktor 2 wirkt sich unmittelbar auf die durch $f(x)$ repräsentierten y -Werte aus, so dass sich jeder Punkt des Funktionsgraphen genau in Form der Verdopplung seiner y -Koordinate verändert. Beispielsweise kann der Funktionswert $f(-2) = 1$ der Ausgangsfunktion abgelesen werden. Da lediglich der korrekte Antwortgraph durch den Punkt $(-2, 2)$ verläuft, können alle anderen Antwortmöglichkeiten ausgeschlossen werden.

Das Item wurde von 43,6 Prozent der Probanden korrekt bearbeitet. Mit 33,8 Prozent ist (a) mit Abstand der stärkste Distraktor. Auf die Antwortmöglichkeiten (b) und (c) entfallen mit 13,2 bzw. 9,0 weniger Antworten. Lernende erkennen also insgesamt, dass es sich um eine Art Streckung oder Stauchung handeln muss, sind jedoch oft nicht in der Lage, die Gestalt der konkret resultierenden Funktion zu identifizieren.

5.2.7 Parabelöffnung / zwei Nullstellen (D6LG)

86,9 Prozent der Bearbeitungen von Item D6LG1 verweisen auf Option (b). In der zweiten Teilaufgabe konnten hingegen nur 37,0 Prozent der bearbeitenden Schülerinnen und Schüler beide Werte für den Parameter c korrekt ermitteln. Weitere 12,9 Prozent konnten lediglich einen der beiden Parameter korrekt angeben. In 22,9 Prozent der Fälle gelangten Probanden zudem zu Werten von c , von denen mindestens einer falsch war.

5.2.8 Vorzeichen der Ableitung (Z8PC)

Diese Aufgabe war Bestandteil der TIMS-Erhebung und lässt sich auf der entsprechenden Studienskala eher dem gehobenen Schwierigkeitsspektrum zuordnen. So weist es auf dieser einen Wert von 600 Punkten auf, was einer Lösungsquote von 35 Prozent innerhalb Deutschlands bzw. 45 Prozent im internationalen Vergleich entspricht (vgl. KLIEME 2000, S. 88).

Die Aufgabe war zudem nur in einer früheren Version (Code Z7PC) Teil der NRW-Erhebung und wurde aufgrund unzureichender testtheoretischer Qualität ausgeschlossen und zu Z8PC überarbeitet. Insofern bieten die nachstehenden Werte keine uneingeschränkte Vergleichbarkeit.

Lösungsklasse	Z8PC1 (%)	Z8PC2 (%)	Z8PC3 (%)	Z8PC4 (%)	Z8PC5 (%)
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	4,9	25,7	22,9	15,7	17,3
<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	16,6	41,5	18,1	19,2	28,7
<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	20,5	20,8	37,4	16,8	21,1
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	26,0	7,0	9,5	26,8	8,8
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	18,4	3,2	10,1	2,5	20,7
<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	9,7	1,1	1,1	15,7	1,2
<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	2,8	0,5	0,5	2,6	1,5
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	1,2	0,2	0,4	0,7	0,7

5.2.9 Graphische Ableitung III (V3RK)

Dieses Item ist über das Zuordnen charakteristischer Punkte der entsprechenden Funktionengruppen lösbar. So können durch Vergleich der lokalen Extrema der Ausgangsfunktionen mit den Nullstellen der Ableitungsgraphen die korrekten Paare eindeutig bestimmt werden. Im Sinne des graphischen Differenzierens steht hier vor allem die Vorstellung der Ableitungsfunktion als Tangente im Mittelpunkt. Zudem spielt der Zusammenhang zwischen Wachstumsverhalten der Stammfunktion und dem Vorzeichen der Ableitungsfunktion eine wichtige Rolle.

Unter allen möglichen Falschbearbeitungen sticht jene in der zweiten Tabellenzeile besonders hervor, da diese von fast einem Viertel der Lernenden gewählt wurde. Hierbei wurde dem ersten

Funktionsgraphen zwar sein korrekter Ableitungsgraph zugeordnet, jedoch sind die weiteren Zuordnungen inkorrekt. Denkbar ist hier, dass die charakteristischen Stellen der verbleibenden Funktionen einander jeweils falsch zugeordnet wurden. So befindet sich der Tiefpunkt der Ableitungsfunktion, die der zweiten Stammfunktion zugeordnet wurde, in etwa dort, wo diese einen Sattelpunkt besitzt. Die dritte Funktion hingegen besitzt dort einen Wendepunkt, wo der ihr zugeordnete Ableitungsgraph eine lokale Extrem- bzw. Nullstelle aufweist. Denkbar ist aber auch, dass entsprechende Schülerinnen und Schüler ausschließlich die jeweiligen Wachstumsverhalten der Graphen betrachten, wobei die Zuordnung entsprechender charakteristischer Stellen als Strategie nicht genutzt wird.

Lösungsklasse	Häufigkeit (%)
	56,5
	22,3
	11,1
	3,4
	2,6
	1,9
Sonstige Bearbeitungen	2,3

5.2.10 Verschobene Ableitung (X4TP)

Hier ergab sich eine Lösungsquote von 35,7 Prozent. Hingegen wählten 54,0 Prozent der Probanden jedoch Antwortmöglichkeit (b). Mit 4,0 bzw. 5,5 Prozent entfällt nur ein vergleichsweise kleiner Teil der gegebenen Antworten auf die Möglichkeiten (a) bzw. (c).

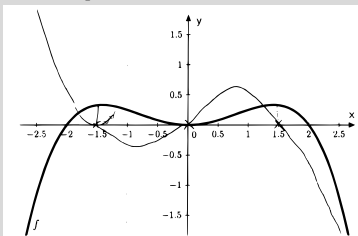
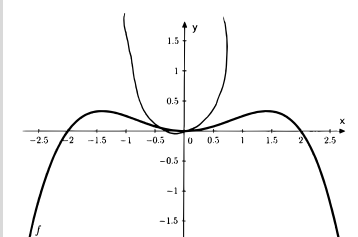
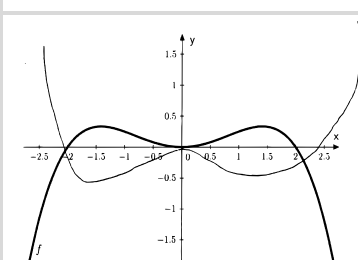
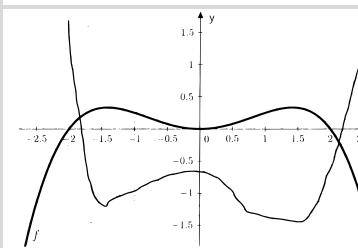
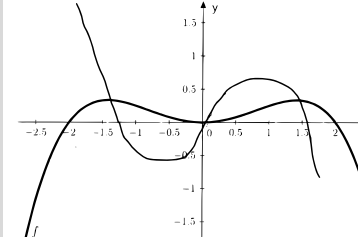
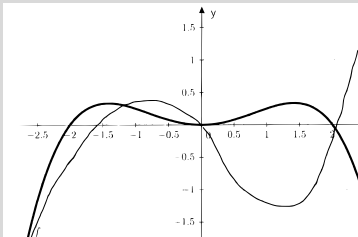
Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler war also nicht in der Lage, beide Konzepte geeignet zusammenzubringen, so dass sie jenen Distraktor wählten, bei dem sich die auf die Stammfunktion ausgeführte Transformation unverändert auf die Ableitungsfunktion überträgt. Die Ergebnisse zeigen deutlich auf, dass es sinnvoll sein kann, im Unterricht auch die Wechselwirkungen beider Thematiken (also das Verschieben, etc. von Funktionsgraphen und den entsprechenden Zusammenhang zum Ableitungskonzept) deutlicher zu explizieren.

5.2.11 Graphische Ableitung I (S3AB)

In diesem auf UBuz (2007) zurückgehenden Item wird graphisches Ableiten im eigentlichen Sinne gefordert, da hier keine Antwortmöglichkeiten vorgegeben wurden und die Lernenden eigenständig einen qualitativ passenden Graphen skizzieren müssen, während keine Funktionsgleichung gegeben ist.

Der Lösungsklasse, welche die meisten Falschlösungen auf sich vereint, ist „Parabel gezeichnet“. In diesem Fall wurde als Ableitungsgraph ein parabelförmiger Graph angegeben. UBuz führt dies vor allem darauf zurück, dass Lernende fälschlicherweise annehmen, die Ausgangsfunktion sei von Grad 3. Entsprechend müsse sich eine Ableitungsfunktion von Grad 2, d.h. ein parabelförmiger Funktionsgraph, ergeben (vgl. UBuz 2007, S. 622 f.). Ursächlich kann eine unterrichtliche Überbetonung von Funktionen dritten Grades sein.

Weiterhin fällt eine starke Tendenz zu achsensymmetrischen Lösungsgraphen auf, wie sie sich anhand verschiedener Lösungsklassen zeigt. So scheint sich für nahezu 30 Prozent der Schülerinnen und Schüler kein Widerspruch aufzutun, wenn sowohl Funktions- als auch Ableitungsgraph eine entsprechende Symmetrieeigenschaft aufweisen. Dass nicht beides der Fall sein kann, lässt sich dabei unmittelbar am Ableitungskalkül erklären: So ist bekannt, dass sich der Grad einer Funktion durch den Ableitungsvorgang um eine Einheit verringert. Für Achsensymmetrie ist jedoch ein gerader Grad notwendige Voraussetzung, so dass nicht beides simultan erfüllt werden kann. Eine entsprechende Argumentation scheint aber nicht vorgenommen zu werden.

Lösungsklasse	Häufigkeit (%)	Beispiel
Korrekte Skizze	43,6	
Parabel gezeichnet	16,9	
Graph an x-Achse gespiegelt	9,0	
Sonstige achsensymmetrische Funktion gezeichnet	3,3	
Charakteristische Stellen von f' und f inkonsistent	11,0	
Charakteristische Stellen von f' und f konsistent aber Vorzeichen von f' inkorrekt	2,1	
Nicht klassifiziert	14,0	—

6 Literatur

- BAUMERT, J., STANAT, P. & DEMMRICH, A. (2001). PISA 2000: Untersuchungsgegenstand, theoretische Grundlagen und Durchführung der Studie. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, ..., M. Weiß (Hrsg.), *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 15–68). Opladen: Leske+Budrich.
- BLUM, W. & TÖRNER, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- BÜCHTER, A. (2012). Funktionale Zusammenhänge erkunden. *mathematik lehren*, Heft 148, 4–10.
- DE BOCK, D., VAN DOOREN, W., JANSSENS, D. & VERSCHAFFEL, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.
- GREEFRATH, G., OLDENBURG, R., SILLER, H.-S., ULM, V. & WEIGAND, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin: Springer Spektrum.
- GRIESEL, H., POSTEL, H., SUHR, F. & LADENTHIN, W. (Hrsg.). (2012). *Elemente der Mathematik: Arbeitsheft 9 / Training prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen*. Braunschweig: Schroedel.
- KIRSCH, A. (1979). Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Mathematikunterricht*, 25(3), 25–41.
- KLIEME, E. (2000). Fachleistungen im voruniversitären Mathematik- und Physikunterricht: Theoretische Grundlagen, Kompetenzstufen und Unterrichtsschwerpunkte. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS/III: Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn: Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung am Ende der Pflichtschulzeit* (Bd. 1, S. 57–128). Opladen: Leske+Budrich.
- KLINGER, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- KLINGER, M. (2020). Funktionales Denken und die Rolle des Geschlechts: Explorative Analyse quantitativer Testdaten. *mathematica didactica*. – Online first
- KLINGER, M. & BARZEL, B. (2019). Der Funktionsbegriff: Zur Illusion von Linearität und anderen Hürden beim Funktionalen Denken. *Unikate: Berichte aus Forschung und Lehre*, Heft 53, 35–46.
- MALLE, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
- SCHLÖGLHOFER, F. (2000). Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *mathematik lehren*, Heft 103, 16–17.
- UBUZ, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 609–637.
- VOLLRATH, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.
- WINTER, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, Heft 2, 4–16.